679798

I PROBLEMI DELLE TAZIONI

RISOLUTI CON NUOVI ARTIFIZJ DI GEOMETRIA

DAL PROFESSORE DI MATEMATICA SUBLIME

N. F.

Digitized by Google

§. 1. IL tempo, che ſpeſſo immerge nell' obblio i parti più leggiadri dell'umano ingegno, non ci ha transmeſſo, che i ſoli temi di que' due libri *delle Tazioni*, che il Grande Apollonio di Perga avea compoſti con greca accuratezza, e con nitore. Ma queſto ramo del *Luogo Riſoluto*, ch'è inſiem venuſto, e fecondo, doveaſi da' Geometri convenevolmente reintegrare, come in ſimili caſi ſi è da altri praticato (*a*). Ed ecco l'Illuſtre Vieta accignerſi al lavoro, e riuſcirne ſaggiamente. Ed ei più per queſte Geometriche Divinazioni, che per tante altre analitiche ſcoverte, di che gli ſiam debitori, reſtò sì pago di ſe ſteſſo, che del faſtoſo titolo di Apollonio Gallo volle inſignirſi. Anche il ſommo Newton laſciati i Cieli, e la Natura, che ſtava ſagacemente ſpeculando, ſi rivolſe a' Problemi delle Tazioni: e profondendo su di eſſi i chiari lumi del ſuo ingegno, e con geometriche preparazioni, e con ſaggi analitici ripieghi ſeppe diſciorli tutti aſſai bene (*b*).

Intanto un noſtro Geometra nel ponderar coteſte ſoluzioni per certe ſue *Euriſtiche Ricerche* s' imbattè, ſon oramai ſei luſtri, in un metodo, che ci ſembra ſemplice, chiaro, ed uniforme. Dappoichè nel riſolverſi colla guida di tal Metodo ciaſcun Problema delle Tazioni, da un medeſimo

(a) Nell'Iſtoria delle Matematiche, ſi rapportano varie di queſte Geometriche Divinazioni fatte da' Matematici Moderni su certe Opere perdute degli Antichi. Anche l'Autore di queſt'Opuſcolo s'è induſtriato di divinare la genuina dimoſtrazione del Teorema Ciclometrico del Cotes, la quale ha travagliato i ſommi Analiſti del ſecol traſcorſo.

(b) Queſti Problemi ſon anche ſuſcettibili di un'enunciazione generale, qual' è quella, che ad eſſi recò Pappo Aleſſandrino Collez. Mat. Lib. VII. Prof. *Punctis, rectis lineis, & circulis, tribus quibuscumque poſitione datis, circulum deſcribere per unumquodque datorum punctorum, qui unamquamque linearum datarum contingat.*

ſimo principio convien partirne, e toſto pervienſi ad una medeſima geometrica riduzione. Queſta ne offre all' inſtante i due punti ſoddisfacenti al Problema. L' Analiſi geometrica, che il neſſo delle verità medie ne svolge, è aſſai naturale. E finalmente niuna di dette ſoluzioni ſi fa dipendere da' Problemi precedenti, ſicchè queſti ne ſtieno in quella incaſtonati, come Vieta ſuol produrle (*c*). E quindi per tali ragioni ci lusinghiamo, che coteſta famiglia di Geometrici Problemi reſti in tal modo elegantemente riſoluta. Noi dunque la preſentiamo al Pubblico, ch' è giuſto eſtimator delle coſe; perchè all' ombra di lui niuno oſi di ſtenderle maligno il dente. Ed anche perchè in queſto lavoro la forma vi traluca di quegli altri, che in un proſpetto ſono ſtati non ha guari di tempo indicati (*d*).

Ma qual n' è mai il principio regolatore della più parte di queſti Problemi, o l'identica loro riduzione? L'uno è un faciliſſimo Teorema di Geometria Elementare: e l' altra l' è come un Poſtulato, che *Lemma Problematico* può dirſi più acconciamente. *In un Triangolo*, eccone quel Teorema, *ſe diaſi la baſe, e la differenza de' lati, ciaſcun di queſti dovrà ſerbare una ragion data alla diſtanza, che ha il vertice di eſſo Triangolo da una retta data di poſizione*. Queſto Teorema, per quanto è a noſtra contezza, non fu da altri avvertito: o almeno niuno mai ha creduto potergliſi formare una chiara dimoſtrazione per gli Elementi Piani. Imperciocchè nelle Iperboli oppoſte, ove potrebbeſi ravviſare una ſerie d' infiniti triangoli condizionati nel propoſto modo, cia-

(c) Del che appreſſo favelleremo.

(d) L' Autor di queſt' Opuſcolo avendo per più di ſei luſtri ammaeſtato immenſi giovani sì nel Liceo Napolitano, che privatamente, loro profuſe delle nuove ſpeculazioni full' Analiſi, e ſulla Geometria generoſamente. La maggior parte di que' Giovanetti ſon fidi depoſitarj di queſte dottrine: e degli altri non v' è mancato chi adottandole qual proprio parto le aveſſe monſtruoſamente eſibite. Noi dunque temendo la ſteſſa ſciagura in queſt' Opuſcolo lo abbiam prodotto per farlo dal Pubblico garantire.

ciaſcun ramo; che in un di detti triangoli n'è un lato, ſta alla perpendicolare calata dal ſuo eſtremo sulla Direttrice in una ragion data. Ma gli accurati Scrittori su i Conici, ed eſpreſſamente il Gran Newton ſoglion dire, che coteſta analogia vi regga per la natura dell'Iperbole. E queſta non ſi potendo al Cerchio o al Triangolo comunicare, parrebbe giuſto non poterſi quel Teorema cogli Elementi Piani dimoſtrare.

Il Principio di riduzione vien poi concepito ne' ſeguenti termini „ *Dato di poſizione un punto fuori d' una retta terminata da una ſola parte, inclinare da quello su queſta una retta, la quale ſtia al ſegmento che ne tronca in una ragion data.*

§. 2. *Defin.* Se nella baſe di un Triangolo, e dal punto medio di eſſa, ſi prenda una terza proporzionale in ordine alla ſemibaſe ed alla ſemidifferenza de' lati, la perpendicolare elevata ſu detta baſe dall'eſtremo di tal retta, ſi dirà *Direttrice* di quel lato, verſo del quale ella ſi è preſa.

Così la baſe AB del Triangolo ADB, ſi biſechi in C, e preſavi la retta CP terza proporzionale dopo le due rette AC, ed $\frac{1}{2}$ (DB — DA), ſi elevi ad AB dal punto P la perpendicolare PS; queſta potrà chiamarſi la Direttrice del lato AD, il quale colla PS è dalla ſteſſa parte del punto C. E prendendovi C*p* uguale a CP, ed alzata dal punto *p* la *ps* perpendicolare ad AB, ſarà la *ps* Direttrice del lato DB, per eſſer le due rette *ps* e DB dall' altra parte del punto C, cioè amendue a deſtra di C, come quì ne pare. *Fig. 1.*

§. 3. *Coroll.* Col centro D intervallo DA, che ſia il minore de' due lati del propoſto Triangolo, ſi deſcriva il cerchio EAH, e l'altro lato DB ſi prolunghi infino alla circonferenza in E, e poi ſi biſechi la BV in G; ſarà AC : BG : : BG : CP. E quindi $BG^2 = AC.CP$, e prendendone i loro quadrupli, anche $BV^2 = AB.2CP$.

PROP. I. TEOR. FONDAMENTALE.

§. 4. *Se dia∫i la ba∫e AB del Triangolo ADB, e la differenza de' lati di e∫∫o DB, DA, ciaſcuno di queſti due lati avrà una data ragione alla perpendicolare abba∫∫ata dall' angolo verticale D ſulla ſua Direttrice.*

Dim. Caſo I. Premeſſi gli artifizj del Coroll. prec., ſi abbaſſi la DR perpendicolare ad AB, e vi ſi prenda la C*r* uguale alla CR. Sarà la rimanente parte *r*B uguale alla rimanente RA. E quindi R*r*, ch' è la differenza delle due RB ed *r*B, ſarà uguale alla differenza de' due ſegmenti RB ed RA della baſe del Triangolo, cioè alla BH. Vale a dire, l'è 2CR = BH, e BH — 2CP = 2CR — 2CP = 2PR.

Ciò premeſſo per la natura del cerchio è il rettangolo EBV uguale all' altro ABH. Dunque togliendo da eſſi riſpettivamente il quadrato di BV, ed il rettangolo di AB in 2CP, che nel Coroll. prec. ſi ſon moſtrati uguali, ne reſterà il rettangolo EVB uguale all' altro di AB in BH—2CP, cioè di AB in 2PR. E ſarà quindi EV a 2PR, cioè prendendone le metà loro, AD a DS, come AB a BV: la qual ragione è data.

Caſ. II. L'Aggregato de' due rettangoli EBV e BV² è uguale alla ſomma degli altri due ABH ed AB. 2CP, che a quelli ſi ſon moſtrati riſpettivamente uguali. Dunque ſarà 2DB. BV=AB (BH+2PC) =AB (2CR+2CP) =AB. 2R*p*. E quindi ſtarà DB ad R*p*, o alla ſua uguale D*s* nella data ragione della baſe AB alla BV differenza de' lati(*e*).

PROP.

(e) Conceſſa la geneſi organica delle Iperboli Oppoſte, qual ſi rapporta dall' Illuſtre Marcheſe dell'Oſpitale nel ſuo Trattato Analitico su i Conici, talun potrebbe addurre la preſente dimoſtrazione per iſtabilirvi per prima proprietà di una tal Curva, *che ogni inclinata da un di lei fuoco ſtia alla diſtanza del ſuo eſtremo dalla direttrice, come l' eccentricità al ſemiaſſe*. Ed eſprimendo per *x*, ed *y* le coordinate rettangole, che appartengonſi a quell' eſtremo, per *a*, e *b* i ſemiaſſi conjugati, e l' eccentricità per *e*, facilmente in queſti ſimboli potrà eſprimerſi l'anzidetta inclinata, e la diſtanza del ſuo eſtremo dalla direttrice. E traducendo in Equazione l'an-

Prop. II. Lemma problematico.

§. 5. *Dato di posizione il punto B e la retta KH terminata in H, inclinare da quel punto su di questa retta la BC, la quale stia al segmento CH troncatone da essa su di quella in una ragion data, cioè della retta m all' altra n.* Fig. 2.

Soluz. Geomet.

Prendasi He uguale ad *n*. Si congiunga la BH, e dal punto *c* si adatti sulla BH la *cb* uguale ad *m*. Di poi da B si conduca la BC parallela alla *bc*. Sarà BC a CH come *bc* a *c*H pe' triangoli simili BCH, *bc*H, cioè come *m* ad *n*.

Soluz. Analit.

Dal punto B si abbassi la BK perpendicolare alla KH. E poi pongasi BH=*a*, HK=*b*, BK=*c*, e KC=*x*. Sarà HC=*b*—*x*, e BC=$\surd(cc+xx)$. E per le condizioni del Problema dovrà stare $\surd(cc+xx)$: *b*—*x* :: *m* : *n*: onde avrassi (*f*) la seguente quadratica Equazione

$$cc+xx=\frac{mm}{nn}(b-x)^2$$

Che agevolmente si potrà ordinare, risolvere, e geometricamente costruire. Ella intanto ha due radici: onde due punti dovran rinvenirsi colla costru-

l' anzidetta Analogia si otterrà immantinente l' ovvia Equazion della Curva, o l'essenziale proprietà di essa, che *il quadrato di qualunque semiordinata all' asse stia al rettangolo delle ascisse da entrambi i vertici, come il parametro principale all' asse*. Ciò posto, se il nostro Teorema, e la sua elementare dimonstrazione si fosser proferte all' intelletto dell' Ill. Marchese dell' Ospitale, egli certamente, da giudizioso che l' era, avrebbe sì nell' Iperbole, che nell' Ellisse adottato questo Sistema didascalico, che sembra più facile, e più conveniente di quello, che il Valentuomo ne' detti Conici ha seguito. Imperocchè la I. Prop. dell' Iperbole, ch' ei ne stabilisce, contiene una verità di poco rilievo: nè poi è naturale l'Equazione alla curva, che ne reca nella II. E queste cose valgano a far intendere non esser di ovvia avvertenza il Teorema di già esposto, e la sua dimostrazione.

(f) Qui le *m*, ed *n* sono i simboli delle rette date.

ſtruzione, quando il Problema non ſia impoſſibile. E due punti benanche rilevanſi dalla prec. Soluz., ma ſegnati nella BH. Su di che vuol intenderſi bene, *che nel deſcriverſi col centro c intervallo n il cerchio bb', queſto ordinariamente dee ſegnare i punti b, e b' nella* BH. Dunque *altrettanti dovran marcarne nella* KH *le parallele, che dal punto* B *ſi conducono alle congiungenti cb, cb'. E tali punti ſaranno i ſoddisfacenti al Problema* (g).

§. 6. *Scol.* A queſto Problema riduconſi tutti que' delle Tazioni, che io quaggiù riſolvo. E'l Principio che regge le ſoluzioni della maggior parte di eſſi, n'è il Teorema precedente. Intanto l'è dicevol coſa il diſtender ſolamente le Analiſi Geometriche di tali Problemi, ſenza punto impegnarmi a comporli, o a diviſarne i diverſi caſi (h).

Prop. III. Probl.

§. 7. *Dati di poſizione i due punti A, e B, e la retta FG, deſcrivere un Cerchio, che tocchi queſta retta, e paſſi eziandio per que' due punti.*

Fig. 3.

Analisi Geom.

Si biſechi la retta AB, che congiunge i due dati punti A, e B: e dal punto D della biſezione, ſi elevi ad eſſa retta la perpendicolare DF,

(g) L'Illuſtre Vieta con finezza di Sinteſi riſolvè i dieci Problemi delle Tazioni (computandovi benanche que' due che leggonſi negli Elementi), e vi frappoſe ſette geometrici Lemmi. Egli non rilevò in alcun di queſti Problemi i due punti ad eſſo ſoddisfacenti: e forſe ciò omiſe con avvedutezza per non moltiplicare immenſamente i caſi delle ſoluzioni, alcune delle quali ei fa dipenderne dalle precedenti, come ſi uſa di fare in Geometria. Anche il Gran Newton non ſi curò di eſibire nelle analitiche ſoluzioni de' medeſimi Problemi i due punti ſoddisfacenti a ciaſcuno di eſſi. E nè tampoco vi marchiò il gemino ſegno $\pm$ ne' radicali quadratici, che n'eſprimono i valori dell'iguota x. Checchè ne ſia di tutto ciò noi ammiriamo i pregi delle ſoluzioni di que' due Valentuomini; ma non poſſiamo obbliare quelli, che a queſto Metodo, ſe il penſier non ci delude, deggionſi attribuire.

(h) Queſte coſe poſſono ſupplirſi da qualunque Giovanetto.

DF, che incontri in F la data retta FG. Nella retta DF dovrà esserne il centro del richiesto cerchio: e supposto lo nel punto C, si abbassi da questo punto la CE perpendicolare alla FG, e si uniscano per la CB i due punti C, e B.

Ciò posto il triangolo CEF è dato di Specie, come ben si comprende. Dunque sarà data la ragione di CE, o della sua uguale CB alla CF. E quindi la presente indagine si ridurrà al *Lemma Problematico*, cioè a dover condurre dal dato punto B l'inclinata BC sulla CF data, sicchè stia BC a CF in una ragion data. Ed in tal modo si avranno i due punti soddisfacenti al Problema.

Prop. IV. Probl.

§. 8. *Date di posizione le due rette FE, FH, e 'l punto B, descrivere un cerchio, che passi per questo punto, ed insiem ne tocchi quelle rette.* *Fig. 4.*

ANALISI GEOM.

Si bisechi l'angolo HFE delle due date rette FE, FH. Nella retta DF, che il bisega, dovrà ritrovarsi il centro del cerchio addimandato. Suppongasi esserne il punto C cotesto centro: ed abbassata da C sulla FE la perpendicolare CE, si unisca la retta CB. Sarà dato di Specie il triangolo rettangolo CEF: onde dovrà esser data la ragione del cateto CE all'ipotenusa CF: cioè per dover essere dalle condizioni del Problema la CE uguale alla CB, sarà anche data la ragione di CB a CF. E la presente ricerca dovrà ridursi a quella del *Lemma Problematico* (*i*), e vi si otterranno i due punti soddisfacenti.

§. 9.

(i) Il Problema prec. (lo che può anche dirsi di questo) potrebbesi risolvere prendendo la GE media proporzionale tra le due AG, e GB, e poi descrivendo un cerchio, che passi pe' tre punti A, B, E. Ma cotesta soluzione non farebbe unità colle altre di quest'Opuscolo, e perciò si è omessa.

§.9. *Coroll.* A queſto Problema può agevolmente ridurſi il ſeguente:
Fig. 5. *Dato il Cerchio GMK, e le due rette BA, BD di poſizione, deſcrivere un' altro Cerchio, che tocchi sì quello che queſte.* In fatti ſuppoſto eſſer C il centro del richieſto Cerchio, ſi abbaſſino da eſſo ſulle date rette le perpendicolari CA, e CD riſpettivamente: e protrattele in H, ed E, finchè le due AH, e DE pareggino il raggio del dato cerchio, ſi tiri HF parallela ad AB, ed EL all' altra DB. E finalmente dal punto C al centro G del dato cerchio ſi conduca la CG. Saranno tra se uguali le tre rette CA, CD, CM per le condizioni del Problema. E quindi anche le tre altre CH, CE, CG. Dunque dovrà deſcriverſi un Cerchio, che tocchi le due HF ed EL date di poſizione, e che paſſi per G (*Prob. prec.*). E 'l centro di queſto Cerchio, ſarà anche centro del richieſto.

§.10. *Scol.* Ne' ſeguenti Problemi, che ſono i più difficili di queſto genere, oſſervaſi benanche la medeſima Riduzione, ed oltre a ciò la loro dipendenza dal Principio Fondamentale, o dalla I. Propoſizione.

Prop. V. Probl.

§. 11. *Dati di poſizione i due punti A, e B, e 'l cerchio EGQ,*
Fig. 6. *il quale ſia anche dato di grandezza, deſcrivere un' altro Cerchio, che lo tocchi, e paſſi ancora per que' punti.*

Analisi Geom.

La retta AB, che congiunga i dati punti, ſi biſechi: e poi dal punto D della biſezione, ſi alzi la DT perpendicolare ad eſſa retta. Sarà chiaro doverſi ritrovare nella DT il centro del Cerchio che ſi domanda. Sicchè ſupponendolo in C, ſi uniſca la CA, e dal centro E del dato Cerchio, ſi tiri al punto C la CE. Sarà per le condizioni del Problema la CG uguale alla CA: e 'l Triangolo ACE avrà per baſe la data AE, e la EG anche data per differenza de' lati AC, CE.

Il

Il perchè dovrà esser data di posizione la retta PT (*k*) Direttrice del lato AC. Ciò posto si abbassi dal punto C la CS perpendicolare alla PT. Sarà data per la Propositione Fondamentale la ragione di AC a CS: e sarà anche data quell' altra di CS a CT, per esser dato di Specie il Triangolo CST. Dunque sarà anche data la ragione di AC a CT. E 'l punto C, e l' altro soddisfacente al Problema, potranno investigarsi per lo *Lem. Probl.*

Prop. VI. Probl.

§. 12. *Dati di posizione il punto B, la retta QR, e 'l Cerchio MNA, che sia anche dato di grandezza, vuol descriversi un' altro Cerchio, che tocchi il Cerchio dato, e la data retta, e passi altresì pel punto dato.* *Fig. 7.*

Analisi Geom.

Il punto A sia il centro del dato Cerchio, e l'altro C suppongasi esser quello del richiesto. Si congiungan le rette CA, CB, AB, e da C si abbassi la CD perpendicolare alla data DR. Saran tra se uguali le tre rette CB, CN, CD per le condizioni del Problema. Onde la data AN dinoterà la differenza de' due lati AC, e CB del Triangolo ACB, di cui si è anche data la base AB. E quindi in forza della Propositione Fondamentale dovrà esser data di sito la Direttrice PH del lato CB. Ed abbassando dal punto C la CS perpendicolare alla data PH, sarà data la ragione di CB, o della sua uguale CD, all' altra CS (*l*). E 'l Quadrilineo CDHS, per aver tutti i suoi angoli di date grandezze ed i due lati CD, CS in una data ragione, sarà dato di specie, e vi sarà data di posizione la sua diagonale HC. Il perchè essendo data la ragione di CS a CH, ne sarà anche data l' altra di BC a CH.

(k) Prop. Fondam.
(l) La med. Prop.

a CH. Ed un tal Problema si vedrà ridotto al nostro *Lemma Problematico*, cioè di dover condurre dal dato punto B sulla CH data di posizione la retta BC, la quale stia al segmento HC in una ragion data. E si avranno in tal modo i due punti soddisfacenti al Problema (*m*).

Prop. VII. Probl.

Fig. 8. §. 13. *Dati di posizione i due Cerchi MN, e GH, e la retta RE, e dati i semidiametri di essi, si cerca di descrivere un' altro Cerchio, che tocchi sì questa, che quelli.*

Analisi Geom.

Suppongasi esser C il centro del richiesto Cerchio. Da tal punto conducansi a' centri A, e B de' dati Cerchi le rette CA, e CB. E dallo stesso punto C si abbassi la CE perpendicolare alla data retta RE, e si protragga in D, sicchè la ED uguagli il raggio BK del Circolo BKG. Finalmente per lo punto D si tiri la DH parallela alla data RE: e si congiunga la retta AB.

E poichè il Triangolo ACB tien per base la data retta AB, e per differenza de' suoi lati AN—BK, ch' è una retta data, vi sarà data di posizione la PS Direttrice del lato CB (*n*). E dovendo essere per le condizioni del Problema le tre rette CN, CK, CE uguali fra loro, sarà CB uguale a CD. Sicchè unita la CH, ed abbassata la CS perpendicolare alla SH, sarà data per la Proposizione Fondamentale la ragione di CS, a CB, o alla sua uguale CD. Ed oltre a ciò dovrà esser dato di specie il Quadrilineo CDHS, e di posizione la sua dia-

(m) Le soluzioni Newtoniane de' Problemi delle Tazioni non son mica brevi, nè uniformi tra loro, come può osservarsi nell' Aritmetica Universale del lodato Geometra. E specialmente quelle de' Problemi VI. ed VIII. sono assai intralciate.

(n) Prop. Fondam.

diagonale CH . Il perchè dovendo eſſere CD a CH in una ragion data , in queſta ragione dovrà ſtarne benanche la BC alla CH . E la preſente indagine ſarà ridotta ad inclinare dal dato punto B ſulla CH data di ſito la retta BC , la quale ſtia al ſegmento CH in una ragion data , cioè quella ſi vedrà ridotta al Lemma Problematico , e vi ſaran ſegnati que' due punti ſoddisfacenti .

Prop. VIII. Probl.

§. 14. *Dato di poſizione il punto A co' Cerchi MNR , mnr , che ſieno anche dati di grandezza , deſcrivere un terzo Cerchio , che tocchi i due dati Cerchi , e paſſi ancora per quel punto .* Fig. 9.

Analisi Geom.

Suppongaſi il punto C eſſerne il centro del Cerchio , che ſi domanda , ove i punti B , e *b* ſieno i centri di que' Cerchi dati . E poi ſi uniſcano le rette AC , AB , A*b* , *b*C . Saranno uguali le rette CA , e CN per le condizioni del Problema . Onde il Triangolo ACB avrà per baſe la data AB , e per differenza de' lati AC , e CB la data BN . Ed in virtù della Propoſizione Fondamentale ſarà data di ſito la PS Direttrice del lato AC , e ſarà poi data la ragione di CA a CS perpendicolare calata dal punto C ſulla PS .

Similmente ſi dimoſtra eſſer data l'altra ragione di CA a C*s* perpendicolare abbaſſata dallo ſteſſo punto C ſulla Direttrice del medeſimo lato AC nell'altro Triangolo AC*b* . Dunque ſarà data la ragione di CS a C*s* : ſarà dato di ſpecie il Quadrilineo QSC*s* : e vi ſarà data di poſizione la ſua diagonale QC . Il perchè (o) eſſendo date le due ragioni di AC a CS , e di CS a CQ ſarà data anche quella di AC a CQ . E la preſente inveſtigazione ſi ridurrà , come più volte ſi è oſſervato , al *Lemma Problematico* (p) , e ſi avranno i due punti ſoddisfacenti al Problema .

Prop.

(o) Per la med. Prop. e per eſſer dato di ſpecie il Triangolo QCS .

(p) Se de' tre diverſi dati , che in ciaſcuno de' detti Problemi ne formano la

Prop. IX. Prob.

Fig. 10. §. 15. *Dati di posizione, e di grandezza i tre Cerchi GK, MN, RE, descriverne un' altro, che insiem ne tocchi que' tre Cerchi dati.*

Analisi Geom.

Si concepisca esserne il punto C il Centro del Cerchio da descriversi, e da esso a' centri B, A, D de' Cerchi dati si conducan le rette CB, CA, CD, e si tirino benanche le altre AB, AD. Sarà data di grandezza la retta AB base del Triangolo ACB, e vi sarà anche data la differenza de' lati di esso, ch' è GB—AM. Dunque per la Proposizione Fondamentale sarà data di sito la PS Direttrice del lato AC: e vi sarà data la ragione di esso lato AC alla CS, che dal punto C si mena ad angoli retti sulla PS.

In simil modo si dimostrerà esser data la ragione di AC a C*s* perpendicolare calata dal punto C sulla *ps* Direttrice dello stesso lato AC nel Triangolo ACD. Dunque sarà data la ragione de' due lati CS, e C*s* del quadrilineo CSH*s*, i di cui angoli son dati. Onde ei sarà dato di specie, e la sua Diagonale HC ne sarà data di Posizione. Il perchè essendo date (*q*) le due ragioni di AC a CS, e di CS a CH, sarà anche data quella di AC a CH. E quest' altra indagine si ridurrà pure al *Lemma Problematico*, e si otterranno i due punti soddisfacenti al Problema.

§. 16.

la piena determinazione, due solamente si ritengano, e per lo terzo vi si supplisca, *che il cerchio da descriversi* abbia un dato raggio, il Problema sarà di una facilissima ed ovvia soluzione. In fatti per abbozzarne di qualcuno di essi lo snodamento, e per soddisfare alle ultime indicazioni di Pappo, si proponga *di descrivere un cerchio che abbia il raggio a e che tocchi due cerchi dati di grandezza, e di posizione, i cui raggi sieno R, r.* Il Centro del cerchio del raggio *a* dovrà stare nel vertice di un triangolo, la cui base è la distanza de' centri de' cerchi dati, ed i lati sono $a + r$, ed $a + R$. Dunque tal punto sarà determinabile per la 22. El: 1.

(q) Per la Prop. I., e per esser dato di specie il triangolo CGH.

§. 16. *Scol.* Adriano Romano nel risolvere questo Problema, ch'è piano di sua natura, si valse di una disdicente costruzione, qual si è quella di avervi due Iperboli coniche combinato. Ma il credereste mai? Il sommo Newton seppe da coteste due Curve due Luoghi Piani rilevarne, che fossero le legittime linee per la desiata costruzione. E per un tal riducimento, ch'è nuovo, ed elegante, la soluzione Newtoniana piacque a' Geometri oltremodo (*r*). E se il Valentuomo nel Problema delle quattro rette si seppe investire di Genio Greco per sublimarsi sul Cartesio, di cui qualche ramo della Geometria Sublime gli faceva ombra, lo stesso parmi che abbia praticato nel Problema de' tre Cerchi, che il Geometra Francese non aveva potuto sciorre con eleganza. Anche l'Illustre Vieta avea anteriormente colla sintesi, e per le giuste vie risoluto un tal problema (*s*). Ma le due lodate soluzioni son ben diverse da quella che ha quassù recata l'Autore, e che alle altre delle Tazioni, come lo avea promesso di fare, è uniforme. Intanto niun'altro Geometra, oltre de' due lodati Valentuomini, l' Illustre Vieta e 'l Sommo Newton ha mai ardito di appressarsi a risolvere questa famiglia di Problemi Greci con dell' Analisi Geometrica o cogli Algebrici arti-

(r) Sebbene siane ammirabile l' indicata soluzione del Newton; pur non dimeno egli non vi segna che un sol punto, quando questi deggiono esser due. Ed ecco le parole del Valentuomo: *Habitis autem duobus locis rectilineis habetur punctum quæsitum in eorum intersectione.* Egli è vero, che la soluzione Newtoniana, avvegnacchè destinata a dover tirare da un punto a tre altri dati tre linee rette, le cui rispettive differenze sien date, resti egregiamente eseguita, con segnarvisi un sol punto. Non di meno dovendosi quello adattare all' indagine di un cerchio, che debba toccarne tre cerchi dati, come potran mai rinvenirsi i due centri de' due cerchi soddisfacenti, cioè l'uno che sia inscritto, e l'altro circoscritto a' tre dati? In tal caso, o dovrassi un sol punto ottenere, o i due di essi con due paja di locali rettilinee: e l'uno e l'altro non si convien di fare. Dippiù il Valentuomo non curò di generalizzarvi certi euristici ripieghi per agevolarne le soluzioni degli altri Problemi della medesima famiglia, come è riuscito all' Autore di quest' Opuscolo.

(s) Cioè *circino & regula.*

artificj de' Moderni. *Ed io ancora*, così diceva l' Autore, *mi farei ritenuto di comunicare al Pubblico coteſti miei qualunque fienſi geometrici lavori, ſe l' uniformità del Metodo, la ſemplicità delle Soluzioni, e la loro adeguatezza, che altri han gradite, non aveſſero alla moderazione prevaluto* (t). Intanto per ſuggello di queſti lavori eccone un nuovo Teorema di Geometria Sublime modificato per le preſenti ricerche.

PRINC. GEOM.

Tutti i Problemi Solidi riduconſi al ſeguente generaliſſimo Problema:

Dati di poſizione due punti e due rette, rinvenire un terzo punto, ſicchè congiungendolo con que' due punti dati, ed abbaſſando da eſſo due perpendicolari su quelle linee, ſia data la ragione di una congiungente ad una perpendicolare, e dell' altra congiungente all' altra perpendicolare.

E queſto Problema può deprimerſi a piano, ſe que' due dati punti ſi raccolgono in un ſolo, com' è ne' Problemi delle Tazioni, o ſe ne' ſuoi dati ſiavi qualche altra modificazione.

DIM.

L' apodittica dimoſtrazione di queſto Principio dipende dalla giuſta combinazione di due curve coniche per riſolvere i Problemi Solidi, e da certe nuove Speculazioni su queſte coſe. L' Autore le rapporta altrove congruamente; onde ſia meglio, per non troppo infarcir queſto Argomento, il quì ometterla.

(t) Il Sommo Eulero coronò gli ultimi travagli del ſuo geometrizzare con riſolvere queſto Problema de' tre Cerchi. Ei lo annunzia in un' inedita diſſertazione, che ha per epigrafe: *Solutio facilis Problematis Geometrici, quo quæritur circulus qui tres alios circulos datos tangat.* Noi c' immaginiamo che il Valentuomo aveſſe eſeguita l'indicata ſoluzione con dell'Analiſi Algebrica, che a' Sommi Analiſti era ſtata d' intoppo da gran tempo. Sarebbe di bene l'ammirare coteſta Euleriana ſoluzione, ſe pur fieſi prodotta in Pietroburgo, o almen divinarne la ſpeditezza promeſſaci. Intanto ſperiamo che qualche Geometra da ciò s' induca a chiarir bene, qual neſſo debba eſſervi tra i caſi di un Probl. Geometrico, e tra le radici dell' Equaz. che ſe ne trae, e qual'altro neſſo abbian queſte fra di loro.

079758

Digitized by Google